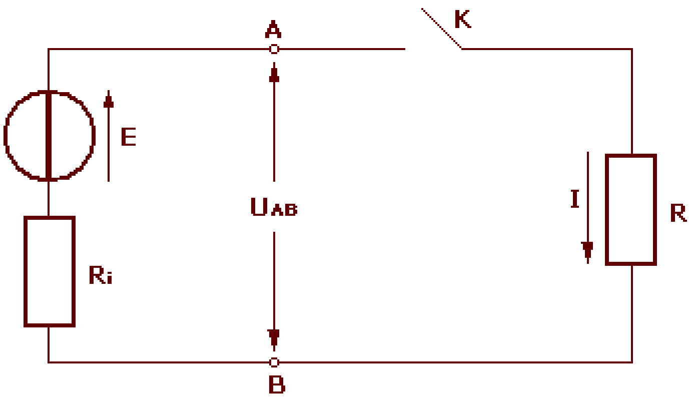
Corso di Elettrotecnica Generale

Capitolo 2 - Reti elettriche

Generalizzazione della legge di Ohm

a) legge di ohm per un circuito chiuso

Si consideri un circuito elettrico, costituito da una resistenza esterna R alimentata da un generatore avente una f.e.m. E ed una resistenza interna R come in figura.



Fino a che il circuito è interrotto in K (circuito aperto), non circola alcuna corrente e fra i due morsetti A e B del generatore si ha una d.d.p.

$$U_{AB} = V_{AB} = E$$

Si immagini ora di chiudere il circuito in K.

Si stabilisce immediatamente una certa corrente I, la quale circola (nel verso convenzionale) dal morsetto positivo A verso il morsetto negativo B lungo il circuito esterno di resistenza R, per chiudersi da B verso A nel circuito interno del generatore di resistenza R_i.

E' evidente che quando il generatore eroga la corrente I la resistenza interna R_i provoca, per la legge di Ohm, una caduta di tensione $R_i I$, che si manifesta con una diminuzione della tensione disponibile fra i poli del generatore: in altri termini, se il generatore a circuito aperto presenta ai poli una d.d.p. $V_{AB}=E$, quando il generatore eroga una corrente I la tensione ai morsetti assume il valore

$$V_{AB} = E - R_i I$$

Applicando la legge di Ohm al circuito esterno, di resistenza R e soggetto alla tensione V_{AB}, si ha d'altra parte la relazione

$$V_{AB} = R I$$

Ne risulta l'uguaglianza

$$E - R_i I = R I$$

dalla quale si ricava l'espressione

$$I = E / (R+R_i)$$

La somma $(R+ R_i)$ rappresenta la resistenza elettrica complessiva del circuito chiuso.

La relazione sopra indicata esprime la legge di Ohm relativa a tale circuito, la quale può essere così enunciata: "Un circuito chiuso in cui agisce una f.e.m. costante è sede di una corrente continua che ha il verso della f.e.m. e un'intensità eguale al rapporto tra la f.e.m. e la resistenza complessiva del circuito".

La relazione $V_{AB} = E - R_i I$

Mostra che la resistenza interna Ri del generatore determina una diminuzione della tensione-corrente V(I).

La caratteristica esterna interseca l'asse delle tensioni nel punto $V_{AB}=E$ che corrisponde alla condizione I=0.

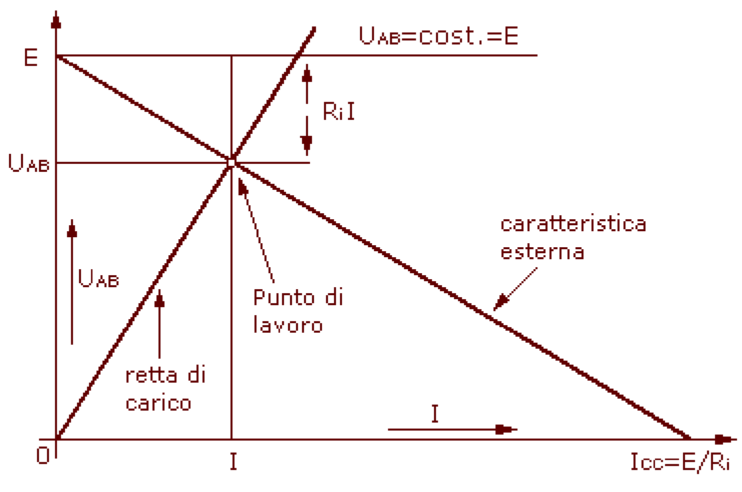
All'aumentare della corrente erogata, in altre parole al diminuire della resistenza esterna R, la caratteristica discende gradualmente fino al valore

$$V_{AB} = 0$$

che sarebbe raggiunto se la corrente erogata assumesse il valore

$$I_{CC} = E / R_i$$

Questo particolare valore della corrente corrisponde a quello che si otterrebbe se si immaginasse di collegare fra loro i due poli del generatore con un conduttore avente resistenza R=0.



Caratteristica esterna e retta di carico di un generatore

Un simile stato di cose viene indicato in pratica con la denominazione di cortocircuito e la corrente che è stata indicata con il simbolo I_{CC} prende il nome di corrente di cortocircuito del generatore: tale corrente è limitata solo dalla resistenza interna Ri, per cui, se quest'ultima è piccola, essa può assumere dei valori tanto elevati da riuscire pericolosi per la buona conservazione del generatore.

Se sul grafico della caratteristica esterna del generatore si traccia anche la retta di equazione $V_{AB}=R_i$ (retta di carico) che rappresenta la caratteristica tensione-corrente V(I) della resistenza esterna R, si ottiene il punto di lavoro P del complesso generatore-carico individuato dalla intersezione delle due rette.

Nei casi in cui uno stesso circuito comprende più generatori aventi le f.e.m. E_1, E_2, ..., E_n e le resistenze interne R_{i1}, R_{i2}, ..., R_{in}, e comprende inoltre più resistenze utilizzatrici R_1, R_2, ..., R_n, la legge di Ohm per il circuito chiuso assume la forma

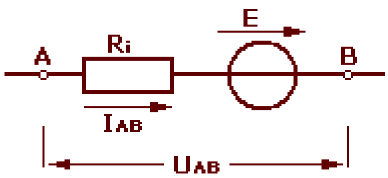
$$I=(E_1+E_2+...+E_n)/(R_1+R_2+...+R_n+R_{i1}+R_{i2}+...+R_{in})$$

In altre parole l'intensità della corrente che percorre il circuito è uguale alla somma delle f.e.m. di tutti i generatori agenti, divisa per la resistenza elettrica complessiva del circuito.

Può accadere che in uno stesso circuito siano incluse una o più f.e.m. agenti in un dato verso e una o più f.e.m. agenti in verso opposto, nel circuito non circola alcuna corrente.
Diversamente, nel circuito si stabilisce una corrente che circola nel verso delle f.e.m. prevalenti.

Se si considerano positive le f.e.m. agenti in un dato verso e negative le f.e.m. agenti in verso contrario, la legge di Ohm per il circuito chiuso è ancora espressa dalla relazione sopra indicata purché il numeratore venga inteso come la somma algebrica di tutte le f.e.m. presenti

b) legge di ohm per un tratto di circuito o legge di ohm generalizzata
Se in luogo dell'intero circuito si considera un tratto di circuito nel quale siano comprese più resistenze e più f.e.m. comunque dirette, la legge di Ohm assume una forma più generale poiché tiene conto anche della d.d.p. esistente fra i capi estremi del tratto di circuito considerato.



Si prenda in esame, per esempio, il tratto di circuito A-B come in figura, percorso dalla corrente I_{AB} e nel quale si trova inserito un generatore di f.e.m. E resistenza interna R_i.
La f.e.m. E sia diretta nello stesso verso della corrente I_{AB}. In base alla relazione

$$V_{AB} = E - R_i\, I$$

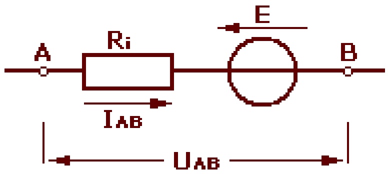
Si può scrivere

$$V_{BA} = -E + R_i\, I_{AB}$$

Da questa si ricava (essendo $V_{BA}=-V_{AB}$):

$$V_{AB} + E = R_i\, I_{AB}$$

Se nel tratto di circuito che si considera, la f.e.m. è diretta invece nel verso opposto alla corrente, come in figura,



E’ da considerarsi come una forza-controelettromotrice (f.c.e.m.) e l'espressione precedente diventa

$$V_{AB} - E = R_i I_{AB}$$

In generale, quando nel tratto di circuito sono inserite più f.e.m. comunque dirette e un numero qualsiasi di resistenze, la legge di Ohm può essere enunciata dicendo che: "la somma algebrica della tensione esistente fra la sezione di ingresso della corrente e quella di uscita, e di tutte le f.e.m. che sono inserite nel tratto di circuito, è uguale alla somma delle cadute ohmiche nel tratto considerato".

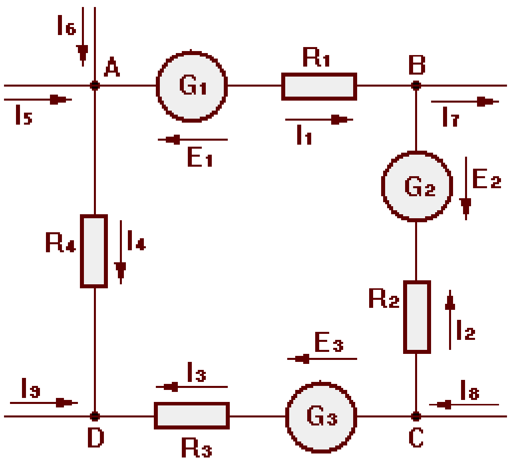
E' questa la legge di Ohm generalizzata la quale può essere scritta sinteticamente nella forma

$$V_{AB} + \Sigma a\ E = \Sigma\ R\ I_{AB}$$

Principi di Kirchhoff

I circuiti di distribuzione dell'energia elettrica, come pure i circuiti interni degli apparecchi elettrici, si presentano spesso come una vera e propria rete di conduttori costituita da un certo numero di circuiti poligonali chiusi formati da uno o più lati: ognuno di questi circuiti costituisce una maglia della rete, e i punti di concorso di più lati ne costituiscono i nodi.

La figura schematizza una rete elettrica: vi sono indicati i generatori che agiscono nei vari lati e le resistenze dei lati stessi.



Il problema principale connesso a simili circuiti si propone la determinazione, in valore e verso, delle correnti che percorrono i singoli lati delle maglie. Per tale determinazione servono i due principi di Kirchhoff.

Si consideri una maglia qualsiasi, ad esempio la maglia ABCD, i cui lati hanno rispettivamente le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4, comprese anche le resistenze interne dei generatori di f.e.m. E_1, E_2, E_3, inseriti nei lati AB, BC e CD.

Siano I_1 I_2 I_3, I_4 le correnti nei quattro lati della maglia, e siano quelli indicati in figura i loro versi fissati ad arbitrio.

Nel nodo A della maglia concorrono quattro lati, due percorsi dalle correnti I_1, e I_4 appartenenti alla maglia ABCD e due percorsi delle correnti I_5, I_6, appartenenti a maglie adiacenti.

Dato che nel nodo A non può aversi né accumulo né sottrazione di cariche elettriche (condizione di continuità), ad ogni carica che arriva al nodo deve corrispondere, nello stesso intervallo, un'eguale carica che si allontana.

Ma la quantità di elettricità che nell'unità di tempo arriva al nodo A non è altro che la somma delle intensità di correnti dirette verso il nodo stesso, e la corrispondente quantità uscente non è altro che la somma delle correnti che si allontanano dallo stesso nodo.

Ne deriva che: "**la somma delle correnti dirette verso un nodo di una rete è uguale in valore alla somma di tutte le correnti che se ne allontanano**"

Quando si considerino positive le correnti dirette verso il nodo e negative quelle che partono dal nodo, si può dire che la somma algebrica delle correnti che convergono in un nodo è nulla.

E' questo il primo principio di Kirchhoff, che applicato al nodo A può essere scritto nelle forme

$$I_5 + I_6 - I_1 - I_4 = 0$$
$$I_5 + I_6 = I_1 + I_4$$

Per quanto riguarda il secondo principio, si consideri ancora la maglia precedente e si supponga di percorrerla nel verso in cui si susseguono i punti A, B, C, D (verso di percorrenza orario).

Si applichi la legge di Ohm ai singoli tratti successivi AB, BC, CD, DA della maglia in questione, tenendo presenti i versi delle f.e.m. e delle correnti indicate nella figura.

$$V_{AB} - E_1 = R_1 I_1$$
$$V_{BC} + E_2 = -R_2 I_2$$
$$V_{CD} + E_3 = R_3 I_3$$
$$V_{DA} = - R_4 I_4$$

Facendo la somma, a membro a membro, di queste espressioni si ottiene

$$- E_1 + E_2 + E_3 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4$$

Essendo nulla evidentemente la somma

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$$

Eseguita lungo il percorso chiuso dalla maglia.

Al primo membro della relazione si ha la somma algebrica delle f.e.m. agenti nella maglia considerata (assumendo come positive le f.e.m. dirette secondo il verso di percorrenza, e negative quelle dirette in verso opposto); al secondo membro si ha la somma algebrica dei prodotti delle resistenze per le intensità delle correnti ossia delle cadute di tensione dei singoli lati della maglia (considerando positive quelle relative ai lati in cui le correnti hanno verso uguale a quello di percorrenza, e negative le cadute nei lati ove le correnti hanno verso opposto a quello di percorrenza).

La relazione sopra citata compendia il secondo principio di Kirchhoff, che può essere così enunciato: "**La somma algebrica delle f.e.m. che agiscono in una maglia è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione (ohmiche) lungo i lati della stessa maglia**"

Per l'applicazione dei principi di Kirchhoff nella risoluzione di una rete si procede nel modo seguente: si fissano ad arbitrio i versi delle correnti nei lati delle maglie e si applica il primo principio ai nodi della rete, escluso uno; si applica poi il secondo principio a un sufficiente numero di maglie, in modo da avere tante equazioni indipendenti quante sono le correnti incognite che bisogna determinare: la risoluzione, mediante le regole dell'algebra, del sistema d'equazioni così ottenuto, determina in valore e verso le correnti incognite. A titolo di esempio si consideri la rete riportata in figura 2.

Il problema è quello di determinare, in valore e verso, le correnti che percorrono i sei lati della rete.
A tal fine, prefissati ad arbitrio i versi delle correnti nei singoli lati, come indicato in figura, si applica il primo principio ai nodi A, B, C e il secondo principio alle maglie ABCA, ABDA e BCDB: si ottengono ordinatamente le sei equazioni seguenti:

$$I_1 = I_2 + I_3 \,;\, I_2 + I_4 = I_5 \,;\, I_6 + I_5 = I_1$$
$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5$$
$$-E_2 = R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_3 I_3$$
$$0 = R5\ I5 - R6\ I6 + R4\ I4$$

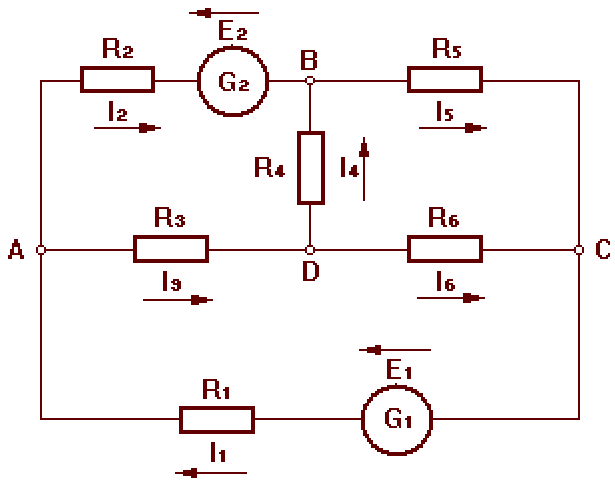
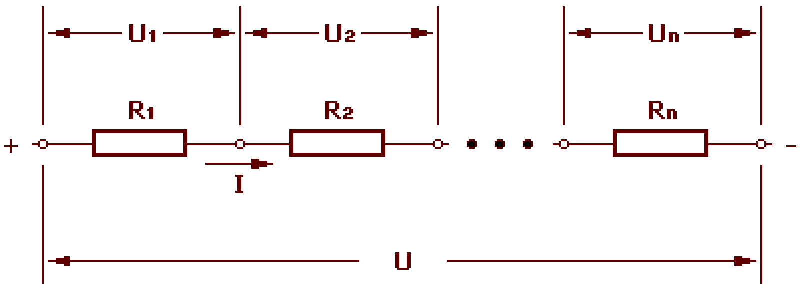


Figura 2

Si hanno dunque sei equazioni indipendenti, quante sono le correnti incognite, che possono essere determinate, in grandezza e segno, risolvendo il sistema: le correnti che risulteranno positive avranno verso opposto a quello indicato.

Raggruppamento in serie di più resistenze

Due o più resistenze si dicono collegate in serie fra loro quando sono connesse una di seguito all'altra in modo da essere attraversate dalla stessa corrente come mostrato in figura.



Un tratto di circuito formato da tante resistenze collegate in serie presenta le proprietà seguenti:

1) L'intensità di corrente I è la stessa in tutte le resistenze della serie;
2) Le tensioni V_1, V_2, ..., V_n misurate ai capi delle singole resistenze coincidono con le cadute ohmiche rispettive e sono date dalle relazioni

$$V_1=R_1I \; ; \; V_2=R_2I \; ; \; .... \; ; \; V_n=R_nI$$

3) La tensione totale V ai capi della serie è la somma delle cadute ohmiche provocate dalle singole resistenze:

$$V=V_1+V_2+...+V_n=R_1I+R_2I+...+R_nI=(R_1+R_2+...+R_n)I$$

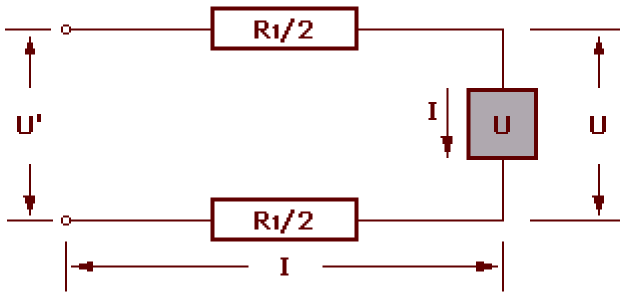
4) L'intera serie equivale a un'unica resistenza R_{eq} pari alla somma di tutte le resistenze che la compongono:

$$R_{eq} = V/I = R_1 + R_2 + ... + R_n$$

Nel caso particolare di n resistenze uguali di valore R connesse in serie, la resistenza equivalente risulta:

$$R_{eq} = n\,R$$

In questo caso, la tensione esistente ai capi si ciascuna delle n resistenze è pari a V/n: un dispositivo siffatto, costituito in modo da poter prelevare le varie tensioni parziali prende il nome di divisore ohmico di tensione.



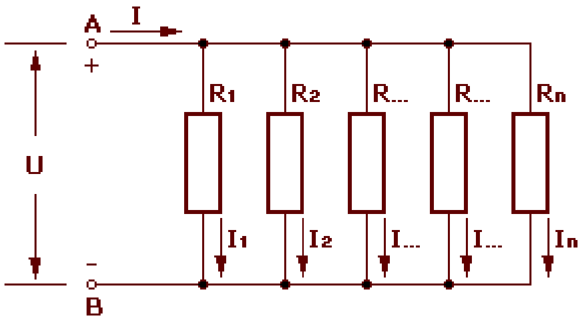
Utilizzatore alimentato da una linea

Raggruppamento in parallelo di più resistenze

Due o più resistenze si dicono collegate in parallelo quando sono connesse in modo da essere sottoposte alla stessa tensione, e cioè quando sono riunite per i loro estremi a formare due nodi A e B come in figura.

I gruppi di resistenze collegate in parallelo presentano le proprietà seguenti:

1) Tutte le resistenze sono sottoposte alla stessa tensione V;
2) Le correnti $I_1, I_2, \ldots, I_n$ nei singoli rami risultano espresse dalle relazioni



$I_1=V/R_1$; $I_2=V/R_2$; $I_3=V/R_3$

3) La corrente totale I del circuito è la somma delle correnti derivate

$$I=I_1+I_2+..+I_n=(V/R_1)+(V/R_2)+..+(V/R_n)=V(1/R_1+1/R_2+..+1/R_n)$$

4) Il gruppo corrispondente a una resistenza equivalente Req definita dalla relazione

$$R_{eq}=V/I=1/(1/R_1+1/R_2+...+1/R_n)$$

Questa resistenza equivalente è sempre minore della più piccola fra tutte le resistenze del gruppo. In particolare, collegando in parallelo n resistenze uguali di valore R, la resistenza equivalente del gruppo risulta:

$$R_{eq}=1/(1/R_1+1/R_2)=(R_1R_2)/(R_1+R_2)$$

In altre parole la resistenza di un arco doppio è data dal prodotto delle resistenze dei due lati diviso la loro somma. Se I è la corrente totale la tensione fra i nodi A e B del parallelo è espressa dalla relazione:

$$V_{AB}=R_{eq}I=I((R_1R_2)/(R_1+R_2))$$

E le due correnti derivate (divisore di corrente) sono espresse dalle relazioni:

$$I_1 = V_{AB}/R_1 = I\ ((R_2/(R_1+R_2))\ ;\ I_2=V_{AB}/R_2=I((R_1/(R_1+R_2))$$

Nel raggruppamento in parallelo si può anche porre:

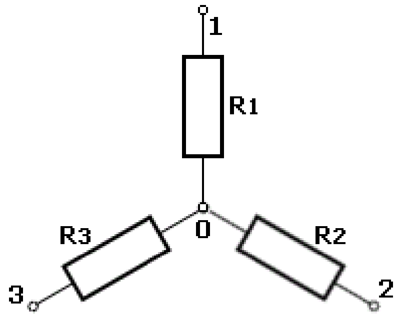
$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$$

Ne risulta che in questo tipo di collegamento "la conduttanza equivalente è data dalla somma delle conduttanze componenti"

Reti serie-parallelo e reti stella-triangolo - Metodo passo-passo

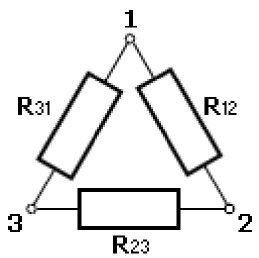
Vengono denominate reti serie-parallelo le reti elettriche di forma complessa le quali rispetto ai morsetti di alimentazione, possono essere ridotte ad una unica resistenza, attraverso ripetute sostituzioni di resistenze equivalenti a gruppi di resistenze connesse fra loro in serie o in parallelo.

Non tutte le reti ammettono un simile procedimento di riduzione. Esistono infatti reti che presentano forme di connessione di tipo diverso dai collegamenti serie-parallelo, e sono precisamente le connessioni dette a stella e le connessioni a triangolo.



Collegamento a stella

In una rete elettrica, un gruppo di tre resistenze forma un collegamento a stella quando, come raffigurato sopra, tre dei loro terminali sono uniti insieme a creare il centro stella 0 e i rimanenti terminali sono connessi a tre distinti nodi della rete.



Collegamento a triangolo

Un gruppo di tre resistenze si dice invece collegato a triangolo quando, come raffigurato sopra, i loro terminali sono connessi uno di seguito all'altro in modo da formare un triangolo i cui vertici sono collegati a tre distinti nodi della rete.

Per collegamenti di questo tipo sussiste il seguente principio d'equivalenza: "Un gruppo di resistenze collegate a stella è equivalente ad un corrispondente gruppo di resistenze collegate a triangolo allorché sostituendo un gruppo all'altro, il regime della rete cui sono connessi rimane invariato"

Le relazioni che forniscono le resistenze R_{12}, R_{23}, R_{31} del triangolo equivalente alla stella di resistenze R_1, R_2, R_3, e le relazioni che danno le resistenze della stella equivalente al triangolo sono le seguenti:

$$R_{12}=(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)/R_3 \quad R_1=(R_{31}R_{12})/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$$

$$R_{23}=(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)/R1 \quad R_2=(R_{12}R_{23})/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$$

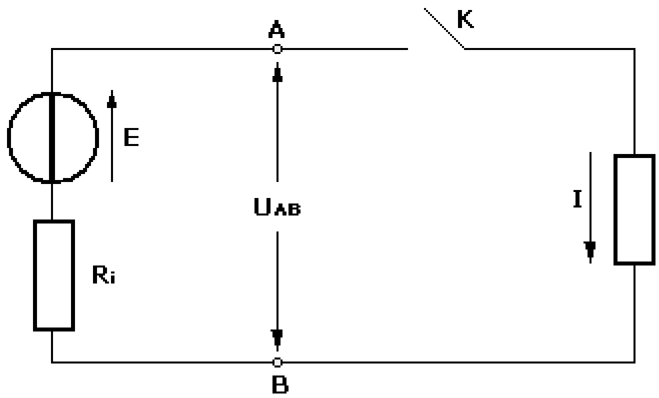
$$R_{31}=(R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1)/R_2 \quad R_3=(R_{23}R_{31})/(R_{12}+R_{23}+R_{31})$$

Nel caso particolare, molto importante, di resistenze fra loro uguali, tutte le precedenti relazioni si riassumono nella semplice formula R_Δ=3RY la quale indica che una terna di resistenze a stella di valore R_Y corrisponde ad una terna di resistenze a triangolo di valore R_Δ tre volte maggiore.

Reti elettriche come reti di bipoli

Nella loro conformazione più complessa i circuiti elettrici possono presentarsi sotto la forma di una rete, costituita da un determinato insieme l di lati o rami connessi fra loro in n punti chiamati nodi della rete, per formare un certo numero m di circuiti chiusi chiamati maglie.

Così nella rete elettrica considerata nella figura i punti A, B, C, D rappresentano i nodi; i tratti di circuito, che uniscono un nodo all'altro, come il tratto AB, costituiscono i lati della rete; il circuito chiuso ABCDA formato da quattro lati fra loro consecutivi è invece una maglia.



Almeno in uno, oppure anche in più rami di una rete elettrica, sono presenti necessariamente dei generatori di alimentazione; in tutti i rami invece è sempre presente un resistore.

E’ definito, come bipolo elettrico ogni parte di circuito del quale emergono due terminali (o morsetti o poli) che ne consentono il collegamento con altre parti di circuito.

Analogamente sono definiti ad esempio come tripoli o quadripoli gli elementi di circuito rispettivamente a tre e a quattro terminali. Ogni singolo ramo di una rete elettrica viene pertanto a configurarsi come un bipolo che, attraverso i suoi due terminali, è connesso con le altre parti della rete. Ne segue che a tutti gli effetti, una qualsiasi rete elettrica potrà sempre essere riguardata come una vera e propria rete di bipoli.

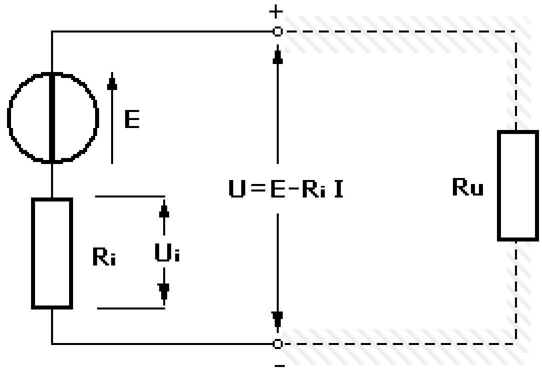
Un bipolo elettrico si dice di tipo attivo quando in esso risultano inseriti dei generatori elettrici (che possono agire nell'uno o nell'altro verso).
E’ invece chiamato bipolo di tipo passivo quel bipolo che non contiene generatori ed è caratterizzato dalla sola presenza di resistenze.

Una delle configurazioni semplici, che può assumere un bipolo attivo è quella rappresentata dal generatore di tensione, nel cui schema elettrico (come in figura) si osserva la presenza della f.e.m. E posta in serie con la resistenza interna R_i. Come già è noto, la relazione V(I) che in questi tipi di generatori lega la tensione ai morsetti V con la corrente erogata I è espressa dalla seguente funzione lineare:

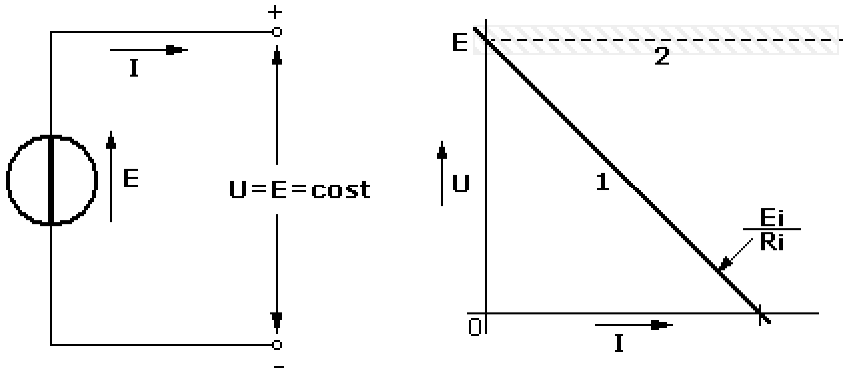
$$V = E - R_i I$$

Questa relazione esprime il fatto che: "La tensione disponibile ai morsetti del generatore è data dalla differenza tra la f.e.m. E e la caduta ohmica interna $V_i = R_i I$"

Affinché a parità di corrente erogata I tale caduta interna sia la più bassa possibile è necessario che la resistenza interna R_i del generatore risulti sufficientemente piccola: si perviene così alla nozione di generatore di tensione ideale per il quale la resistenza interna è ritenuta di valore nullo.



La proprietà fondamentale del generatore ideale è allora quella di poter fornire una tensione costante V=E a qualsiasi valore di corrente erogata.



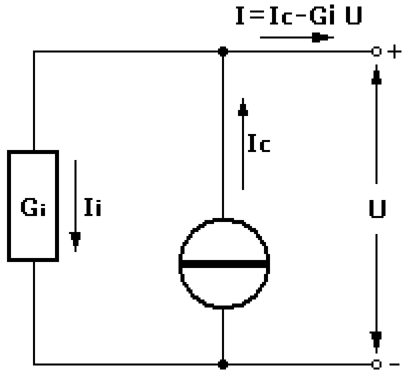
In talune applicazioni può presentarsi la convenienza o la necessità di considerare le sorgenti d'alimentazione di una rete (in altre parole i generatori), anziché nella forma di generatori di tensione, nella forma di veri e propri generatori di corrente, in altre parole nella forma di dispositivi che sono in grado di assicurare il mantenimento di una data corrente nel circuito nel quale sono inseriti.

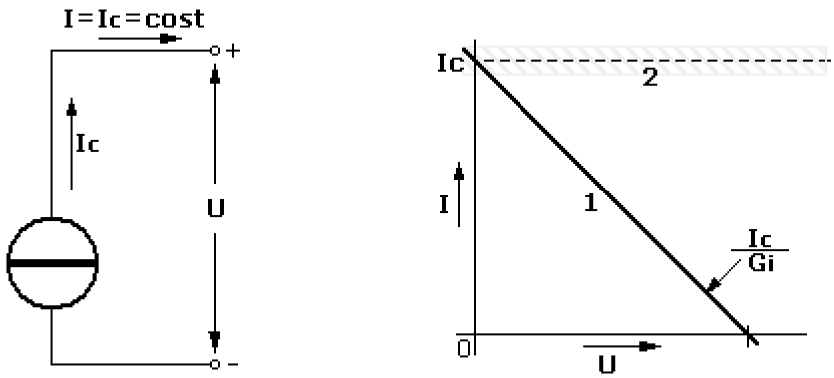
Il generatore di corrente viene rappresentato come un bipolo attivo costituito, da un generatore di corrente costante I_c che ha in derivazione una certa conduttanza interna G_i: in un dispositivo di questo genere la relazione I(V) che lega la corrente erogata I con la tensione ai morsetti V è espressa dalla seguente funzione lineare.

$$I = I_C - G_i V$$

La quale indica che: "La corrente disponibile all'esterno del generatore è data dalla differenza fra la corrente generata I_c e la corrente derivata interna $I_i = G_i V$"

Affinché a parità di tensione ai morsetti V tale componente interna della corrente sia la più bassa possibile, è necessario che la conduttanza interna Gi risulti sufficientemente piccola: si giunge così alla nozione di generatore di corrente ideale per la quale la conduttanza interna Gi è di valore praticamente nullo, e che pertanto è in grado di fornire al circuito una corrente costante I=Ic a qualunque valore della tensione ai morsetti.





La caratteristica corrente-tensione del generatore di corrente reale è rappresentata dalla retta discendente 1, (come in figura); la retta orizzontale 2 rappresenta la medesima caratteristica del generatore ideale.

- Nei generatori di tensione si realizza la condizione di funzionamento a vuoto quando il circuito utilizzatore esterno è aperto, perciò risulta $R_u=\infty$, I=0, V=E.
- Nei generatori di corrente si realizza la condizione di funzionamento a vuoto quando il circuito utilizzatore esterno è chiuso in cortocircuito, per cui risulta $G_u=\infty$, V=0, $I=I_c$.

In tutte le altre condizioni di carico, con i due tipi di generatori collegati rispettivamente a un circuito di resistenza R_u o di conduttanza G_u, le equazioni di funzionamento risultano:

- Per il generatore di tensione: $I=E/(R_i+R_u)$; $V=R_uI$
- Per il generatore di corrente: $V=I_C/(G_i+G_u)$; $I=G_uV$

Un generatore di corrente può essere trasformato in un generatore di tensione ad esso equivalente, e viceversa.

"Due generatori sono fra loro equivalenti se a circuito aperto (I=0) essi presentano la stessa tensione ai morsetti U0 e la stessa resistenza ai morsetti R0".

La R0 rappresenta la resistenza vista fra i morsetti dei generatori di tensione o di corrente: essa è definita ponendo E=0 (cortocircuito) e I_c=0 (interruzione) nei rispettivi circuiti equivalenti.

Ne segue che fra un generatore di tensione e un generatore di corrente, la condizione di equivalenza è assicurata se sono verificate le seguenti uguaglianze (queste relazioni permettono il passaggio diretto dall'uno all'altro tipo di generatore):

$$V0 = E = IC/Gi \quad IC = E/Ri$$
$$R0 = R1 = 1/Gi \quad Gi = 1/Ri$$

Il funzionamento a regime stazionario di una rete elettrica è caratterizzato da ben determinati valori delle correnti nei vari lati, e dei potenziali dei vari nodi: analizzare o risolvere una rete significa determinare tali correnti e tali potenziali (o più spesso le tensioni fra le varie coppie di nodi).

Per le reti di tipo lineare (in pratica costituite da rami assimilabili a bipoli lineari) esistono metodi di studio per via algebrica del tutto generale, date che siano naturalmente le caratteristiche elettriche dei singoli bipoli oltre che lo schema delle loro connessioni, e cioè nota che sia l'intera struttura della rete.

Se lo studio è limitato alla determinazione delle correnti o delle tensioni di alcuni soltanto dei bipoli componenti, si parla d'analisi parziale della rete.

In ogni caso lo strumento basilare dello studio è costituito dall'impiego delle due leggi di Kirchhoff, sia per applicazione diretta, sia più spesso secondo forme e metodi particolari rivolti a semplificare e a snellire i calcoli.

Ai principi di Kirchhoff si affianca la legge specifica dei singoli bipoli rappresentata dalla legge di Ohm generalizzata.

Analisi delle reti mediante i principi di Kirchhoff

Per una rete elettrica comunque conformata e comunque estesa valgono le note leggi o principi di Kirchhoff che rappresentano le leggi fisiche cui obbediscono tensioni e correnti delle reti.

• **Primo principio**

"In ciascun nodo la somma algebrica delle correnti è uguale a zero" $\Sigma a\ I = 0$
Nella somma algebrica, le correnti che entrano nel nodo vanno considerate di segno opposto a quello delle correnti che n'agiscono.

• **Secondo principio**

"In ciascun nodo la somma algebrica delle correnti è uguale a zero" $\Sigma a\ V = 0$
Prestabilito un verso di percorrenza della maglia, e assunte inoltre come positive le cadute ohmiche dovute a correnti concordi col verso di percorrenza e negative le altre, quest'enunciato può essere scritto anche nella seguente forma: $\Sigma a\ E = \Sigma a\ RI$ la quale indica che: "In ciascuna maglia la somma algebrica delle f.e.m. è uguale alla somma algebrica delle cadute ohmiche" I due principi di Kirchhoff, nelle forme sopra enunciate, consentono di scrivere, per qualsiasi rete elettrica, un numero n d'equazioni fra loro indipendenti, tante quante sono i lati l della rete.

Se le incognite, come normalmente avviene, sono rappresentate dalle correnti dei vari lati, il sistema d'equazioni che può essere impostato consente quindi di determinare unicamente, in valore e segno, tali correnti incognite.

Una volta determinate le correnti, si rende possibile il calcolo delle rimanenti incognite della rete che sono rappresentate, ancora in numero di l, dalle tensioni che si stabiliscono fra i due terminali di ciascun ramo: è chiaro, infatti, che una rete elettrica formata da l rami si presenta sempre, in generale, con un numero complessivo di incognite pari a 2l; incognite che sono costituite dall'insieme delle correnti e delle tensioni relative a ciascuno dei rami della rete.

Note le correnti, per il calcolo delle tensioni si fa ricorso alla legge di Ohm generalizzata, che fornisce per ciascuno dei bipoli costituenti i vari lati una relazione del tipo: $V+\Sigma aE=\Sigma aRI$ ove come unica incognita sia ha precisamente la tensione V esistente fra gli estremi del lato. L'applicazione pratica del metodo di Kirchhoff richiede, come condizione essenziale, l'indipendenza delle equazioni che figurano nel sistema risolvente.

Tale indipendenza è assicurata se: nell'applicazione del primo principio si scelgono tutti e soli i nodi sui quali converge almeno uno dei lati non precedentemente considerato nell'applicazione del secondo principio si scelgono tutte e sole le maglie che contengono almeno un lato non precedentemente considerato.

In base a ciò nell'applicare il primo principio basterà prendere in considerazione (una sola volta) tutti gli n nodi della rete meno uno, per scrivere (n-1) equazioni ai nodi; nell'applicare invece il secondo principio per impostare le rimanenti l- (n-1) equazioni indipendenti, converrà di volta in volta contrassegnare i lati utilizzati così da rendere direttamente riconoscibili quelle maglie della rete che presentano almeno un lato non ancora utilizzato: il sistema di equazioni sarà completo quando tutti i lati, secondo tale procedimento, risulteranno contrassegnati.

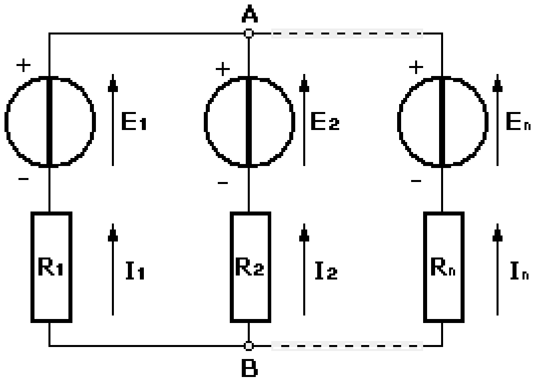
Teorema di Millman

Il metodo dei potenziali di nodo trova un caso particolare d'applicazione molto importante nelle reti binodali, vale a dire in tutte quelle reti che sono costituite da tanti rami derivanti tutti fra due soli nodi come A e B della figura. Per reti di questo tipo si ha una sola equazione di potenziale di nodo, che si presenta nella forma:

$$(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)\, V_A = I_{C1} + I_{C2} + \ldots I_{Cn}$$

Se si assume il nodo B come riferimento, e se ciascun ramo viene considerato sotto la forma di generatore di corrente.

I coefficienti G_1, G_2, ..., G_n sono quindi le conduttanze di ciascuno dei rami derivanti, mentre i termini a secondo membro rappresentano le correnti di generatore presenti in tali rami.



Poiché si ha $V_B=0$ è possibile scrivere $V_{AB}=V_A-V_B=V_A$
Dalla $(G_1+G_2+...+G_n)V_A=I_{C1}+I_{C2}+...I_{Cn}$ si ricava allora la importante relazione
$V_{AB}=(I_{C1}+I_{C2}+...+I_{Cn})/(G_1+G_2+...+G_n)$

Che consente di calcolare direttamente la tensione fra due nodi A e B della rete.

Naturalmente se, come in figura, i rami derivati sono costituiti da generatori di tensione la relazione è ancora valida purché i termini a numeratore si scrivano nella forma:

$$I_{C1}=G_1E_1=E_1/R_1 \; ; \; I_{C2}=G_2E_2=E_2/R_2 \; ; \; I_{Cn}=G_nE_n=E_n/R_n$$

avendo indicato con E_1, E_2, ..., E_n le f.e.m. inserite nei vari lati, e con R_1, R_2, ..., R_n le resistenze dei medesimi. In questo caso conviene quindi porre

$$V_{AB}=(G_1E_1+G_2E_2+...+G_nE_n)/(G_1+G_2+...+G_n)$$

Entrambe queste relazioni esprimono il teorema di Millman che può essere così enunciato: "La tensione che si ha fra due nodi tra i quali sono derivati un numero qualsiasi di rami fra loro in parallelo è data dal rapporto fra la somma algebrica delle correnti di cortocircuito dei singoli rami e la somma delle conduttanze dei rami stessi"; e di fatti ciascuna dei termini a numeratore delle relazioni esprime precisamente la corrente che si stabilirebbe nel ramo in cui si riferisce qualora i due nodi A e B venissero collegati fra loro in cortocircuito.

Metodo della sovrapposizione degli effetti

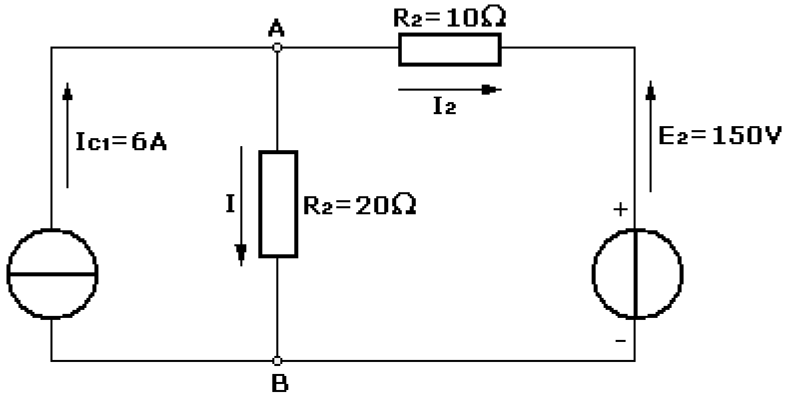
Anche se i metodi d'analisi fin qui esaminati sono del tutto sufficiente per risolvere i problemi relativi alle reti elettriche, il loro impiego pratico per lo studio di reti complesse potrebbe rivelarsi alquanto laborioso per l'elevato numero d'equazioni del sistema algebrico risolvente.

Si sono perciò sviluppati altri metodi di studio, che consentono di procedere speditamente, specie se si tiene conto che non sempre è richiesta l'analisi completa di una rete elettrica, ma in molti casi è sufficiente un'analisi parziale, finalizzata ad esempio al calcolo di una sola corrente. Uno di questi metodi è basato sul principio di sovrapposizione degli effetti.

Questo fondamentale principio afferma in generale che: "In un sistema fisico di caratteristiche lineari, l'effetto prodotto da più cause concomitanti è pari alla somma algebrica degli effetti prodotti singolarmente da ciascuna causa".

Applicato alle reti elettriche lineari, il principio di sovrapposizione può essere così enunciato: "In una rete elettrica lineare alimentata da più generatori, la corrente e la tensione che interessano ciascun lato sono date dalla somma algebrica delle correnti e delle tensioni che sono prodotte in quel lato da ogni singolo generatore agente da solo" A titolo d'esempio si consideri la semplice rete, come in figura, dalla quale si vogliano determinare la corrente I e la tensione V_{AB} del ramo centrale.

In base al principio di sovrapposizione degli effetti, queste due grandezze sono esprimibili per mezzo delle seguenti relazioni:



$I=I'+I"$; $V_{AB}=V'_{AB}+V"_{AB}$

Ove la corrente I' e la tensione V'_{AB} sono la corrente e la tensione che si hanno nel ramo considerato quando nella rete agisce soltanto il primo generatore (in pratica il generatore di corrente) conformemente allo schema in figura a; la corrente I" e la tensione $V"_{AB}$ sono invece la corrente e la tensione che interessano lo stesso ramo quando agisce soltanto il secondo generatore, conformemente allo schema della figura B.

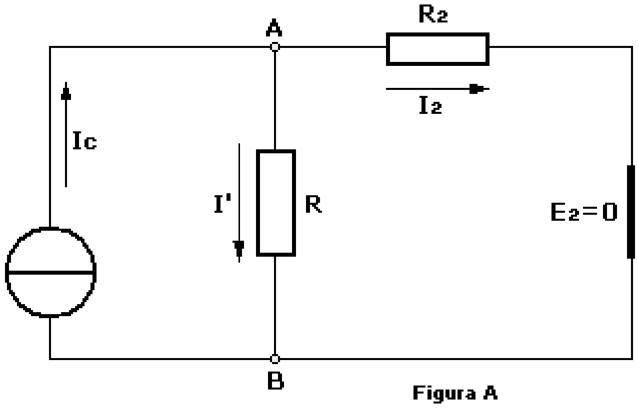


Figura A

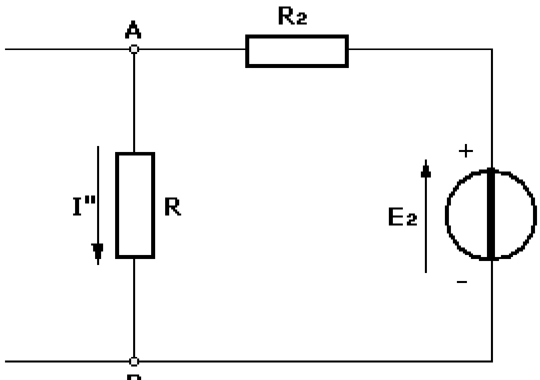


Figura B

E' chiaro, naturalmente, che per consentire di volta in volta soltanto l'azione di un singolo generatore occorrerà sopprimere contestualmente l'azione di tutti gli altri, ponendo per essi la condizione E=0 se si tratta di generatori di tensione e I_c=0 se si tratta di generatori di corrente: all'atto pratico bisognerà quindi sostituire con un cortocircuito le f.e.m. da sopprimere e con un'interruzione le correnti di generatore, lasciando invece presenti nella rete le resistenze interne e le conduttanze interne di ciascuno dei generatori soppressi.

Il principio di sovrapposizione degli effetti, può costituire in molti casi un prezioso ausilio nello studio e nell'interpretazione del funzionamento di una rete lineare.

E' del tutto evidente, infatti, la notevole semplificazione concettuale e pratica che si può conseguire dovendo valutare non l'effetto complessivo di tanti generatori che agiscono contemporaneamente, bensì l'effetto di un singolo generatore per volta.

Principio del generatore equivalente

Si consideri come in figura A una rete elettrica che fa capo a due morsetti A e B (attraverso i quali la rete può essere connessa con un semplice bipolo passivo esterno, o più in generale con un'altra porzione di rete qualsiasi).

La rete considerata sia costituita da generatori di tensione, da generatori di corrente e da resistenze, comunque collegati fra loro: il principio del generatore equivalente stabilisce che la rete facente capo ai morsetti A e B può essere sostituita da un generatore di tensione (di caratteristiche opportune) o da un generatore di corrente, come schematizzato nelle figure B e C, senza con ciò alterare il funzionamento del circuito che è collegato in A e B esternamente ad essa.

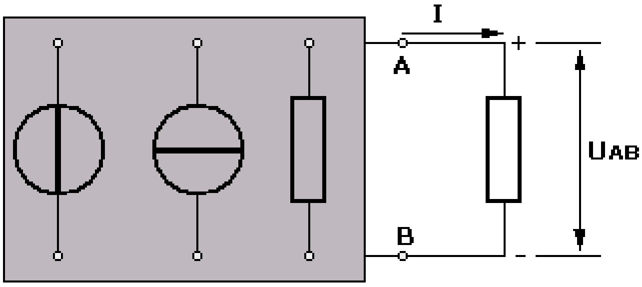


Figura A - Rete assegnata

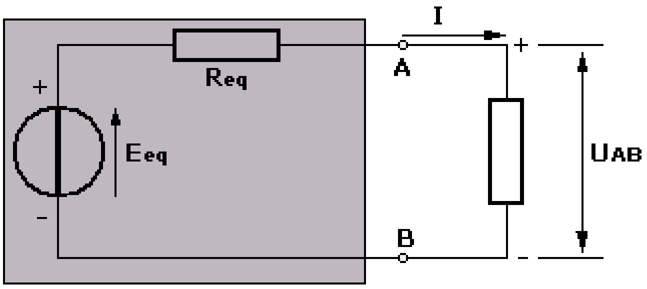


Figura B - Generatore equivalente di Thévenin

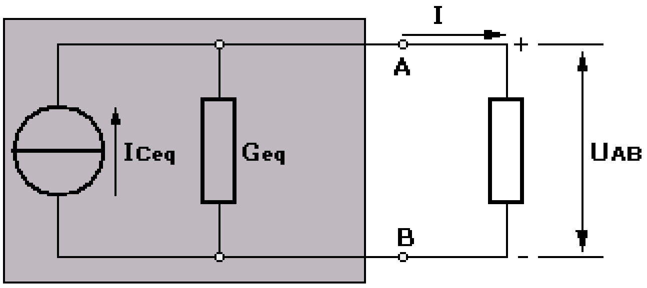
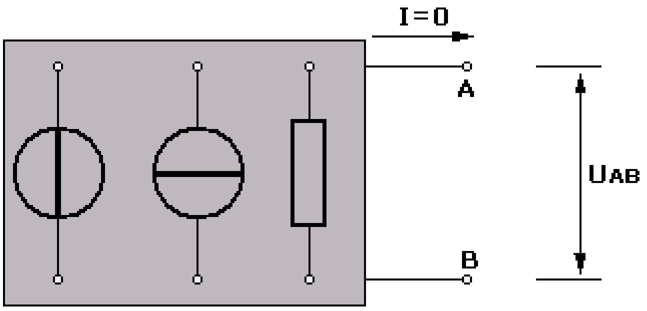


Figura C - Generatore equivalente di Norton

Teorema di Thévenin

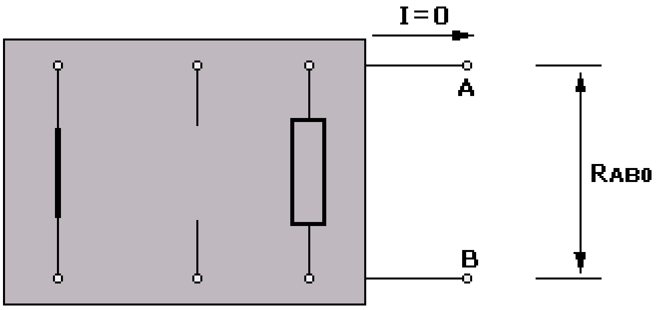
Le caratteristiche del generatore equivalente di tensione sono stabilite dal seguente teorema: "Una rete elettrica lineare si comporta, rispetto a due suoi punti A e B qualsiasi, come un generatore di tensione che presenta una f.e.m. di valore uguale alla tensione V_{AB0} esistente (a vuoto) fra quei due punti, e che ha una resistenza interna di valore uguale alla resistenza vista dagli stessi punti della rete"

Per determinare la f.e.m. del generatore equivalente E_{eq} si dovrà dunque considerare la rete nella sua condizione di funzionamento a vuoto, vale a dire nella condizione di circuito esterno aperto (o staccato) perciò sia I=0,
come in figura: in questa condizione si calcola la tensione V_{AB0} e si pone $E_{eq}=V_{AB0}$



Circuito A

Analogamente, per la resistenza interna del generatore equivalente si porrà $R_{eq}=R_{AB0}$ e si calcolerà cioè la resistenza che la rete offre tra i due punti A e B in assenza di circuito esterno, con le f.e.m. interne corto-circuitate e con le correnti di generatore interrotte, e cioè con la rete resa passiva, come schematizzato in figura.



Circuito B

La dimostrazione del teorema di Thévenin è basata sul concetto d'equivalenza fra reti elettriche a due morsetti: "Due reti si dicono equivalenti, rispetto a due morsetti se l'una rete può essere sostituita all'altra senza che cambi il funzionamento di un qualunque circuito esterno collegato fra gli stessi morsetti".

In un sistema lineare, l'equivalenza di funzionamento così definita sussiste purché le due reti abbiano lo stesso comportamento in due sole condizioni di carico, quali ad esempio il funzionamento a vuoto ($I=0$; $V_{AB}=V_{AB0}$) e il funzionamento in cortocircuito ($V_{AB0}=0$; $I=I_{CC}$):

a) con riferimento alla prima condizione, poiché in un generatore di tensione la d.d.p. che si manifesta a vuoto fra i morsetti coincide col valore della sua f.e.m., per l'equivalenza fra rete e generatore basta che risulti: $E_{eq}=V_{AB0}$

b) con riferimento alla seconda condizione, poiché nel generatore la corrente di cortocircuito incontra la sua resistenza interna R_{eq}, per l'equivalenza fra rete e generatore basta che tale resistenza risulti di valore uguale a quello che la stessa corrente di cortocircuito incontra per attraversare l'interno della rete dal morsetto A al morsetto B, e cioè di valore uguale alla resistenza R_{AB0} vista fra tali due morsetti guardando verso l'interno della rete.

Per verificare l'utilità di questo teorema nello studio parziale delle reti basterà il semplice esempio applicativo che segue. Sia data la rete in figura 1 e si voglia determinare la corrente I che percorre il ramo AB.

Si può immaginare di praticare le sezioni AC e BD, e di sostituire alle porzioni di rete che si trovano alla sinistra di AC e alla destra di BD i rispettivi generatori equivalenti: così facendo, la rete di partenza si trasforma nello schema molto più semplice riportato in figura 2 il quale permette di scrivere immediatamente la seguente relazione:

$$I=\frac{E'_{eq}-E''_{eq}}{R'_{eq}+R+R''_{eq}}$$

La f.e.m. e la resistenza interna del generatore equivalente si calcolano considerando i circuiti A e B precedentemente raffigurati che forniscono rispettivamente:

- Per il circuito A: $E'_{eq}=U_{AC0}=R_2\,\dfrac{E_1}{R_1+R_2}$

- Per il circuito B: $R'_{eq}=R_{AC0}=\dfrac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}$

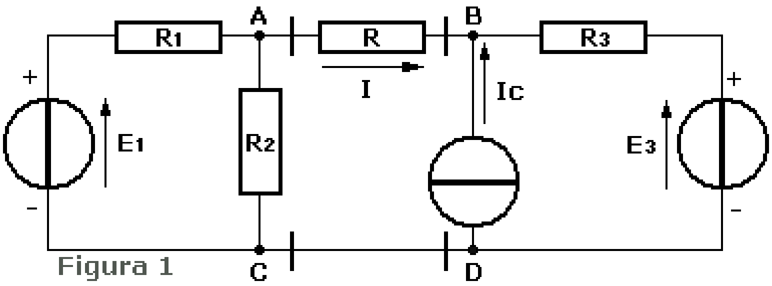


Figura 1

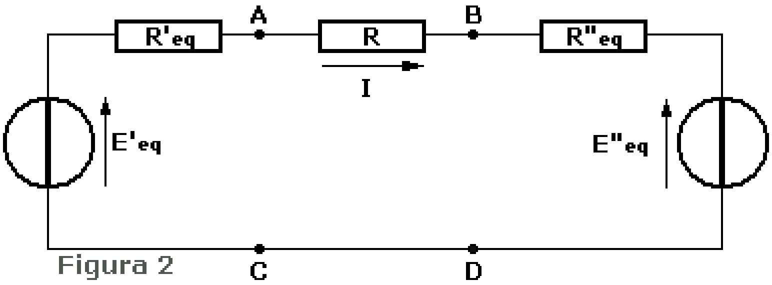
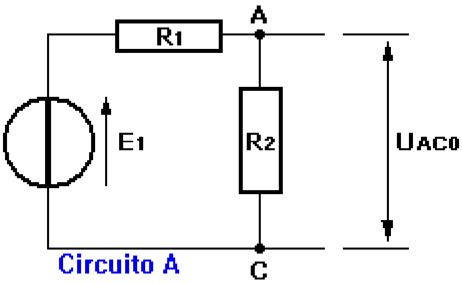
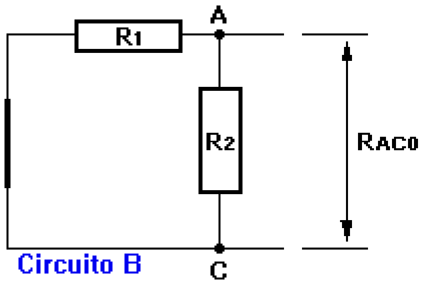


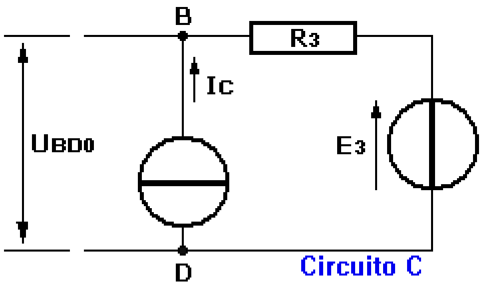
Figura 2



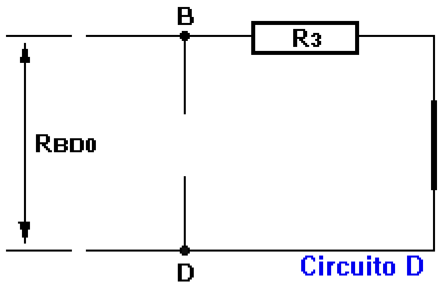
Circuito A



Circuito B



Circuito C



Circuito D

Per il secondo generatore equivalente si dovrà invece considerare i circuiti C e D dai quali si ricavano

$$E''_{eq} = U_{BD0} = R_3 I_C + E_3 \qquad R''_{eq} = R_{BD0} = R_3$$

Teorema di Norton

Oltre che con un generatore di tensione, una rete elettrica facente capo a due punti può essere sostituita anche con un generatore di corrente.

Le caratteristiche, che deve presentare questo tipo di generatore, sono indicate dal Teorema di Norton che afferma: "Il generatore di corrente equivalente a una rete collegata a due morsetti A e B è caratterizzata da una corrente generata I_{Ceq} di valore pari alla corrente I_{ABcc} che si stabilisce in un collegamento di cortocircuito praticato fra A e B, e da una conduttanza interna G_{eq} di valore pari alla conduttanza vista fra gli stessi morsetti"

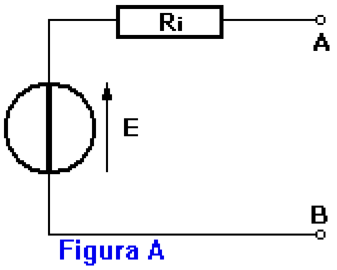


Figura A

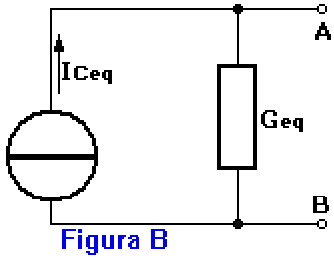


Figura B

Come esempio d'applicazione di questo teorema si consideri la rete indicata in figura A e se ne determini il generatore equivalente di Norton rispetto ai punti A e B, come schematizzato in figura B: (si tratta in pratica di trasformare un generatore di tensione nel corrispondente generatore di corrente).

Il valore della corrente I_{Ceq} di questo generatore è quella che si stabilisce nel collegamento di cortocircuito tra A e B come in figura A. Essa è espressa dalla seguente relazione:

La conduttanza interna G_{eq} è quella che appare fra i due morsetti A e B guardando verso l'interno della rete (resa passiva). Nel caso in esame si ha (da figura B) la seguente relazione:

$$I_{Ceq} = I_{ABcc} = \frac{E}{R_i}$$

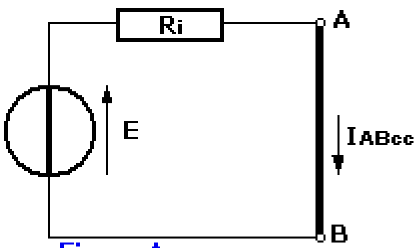


Figura A

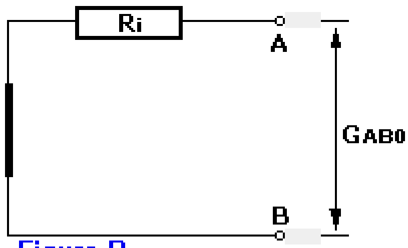


Figura B

Dal punto di vista applicativo, presenta un rilevante interesse la determinazione sperimentale dei generatori equivalenti (di tensione o di corrente) di un'assegnata rete a due morsetti.

$$G_{eq} = G_{AB0} = \frac{1}{R_i}$$

Per la determinazione del generatore equivalente di tensione (Thévenin) basta eseguire due prove a vuoto sulla rete, consistenti in due misure di tensione (tra i due punti cui la rete fa capo) per mezzo di due voltmetri con diversa resistenza interna R_{V1} ed R_{V2}: se V_1 e V_2 sono le tensioni così misurate si potrà scrivere il sistema (nelle incognite E_{eq} ed R_{eq})

$$U_1 = R_{V1} \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_{V1}} \qquad U_2 = R_{V2} \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R_{V2}}$$

Per determinare il generatore equivalente di Norton basta eseguire due prove di cortocircuito, consistenti in due misure di corrente per mezzo di amperometri a conduttanza interna diversa G_{A1} e G_{A2}: se I_1 e I_2 sono le correnti misurate si ha il sistema (nelle due incognite I_{Ceq} e G_{eq})

$$I_1 = I_{Ceq} \frac{G_{A1}}{G_{eq} + G_{A1}} \qquad I_2 = I_{Ceq} \frac{G_{A2}}{G_{eq} + G_{A2}}$$